2020 年 11 月 20 日
プレスリリース
独立行政法人国立高等専門学校機構
茨城工業高等専門学校
学習院中等科

報道関係者各位

【交代結び目における日本人の快挙】
メビウスの帯のつかまえかた
―結び目膜の表裏をかぞえる等式を 62 年ぶりに証明―

１．発表者

伊藤　昇（茨城工業高等専門学校　国際創造工学科　一般教養部　講師）
瀧村　祐介（学習院中等科　教諭（数学））

２．発表概要

茨城工業高等専門学校の伊藤昇講師，学習院中等科の瀧村祐介教諭（数学）は，交代結び目について張られる膜のうち「表裏が付かない場合」について新しい等式を発見し，証明しました．空間内の紐がミクロからマクロまで様々な科学において必須なものであることはよく知られており，19 世紀以前から重要視されていました．閉じた紐「結び目」の複雑さの指標としては石鹸膜のように曲面を張り，「曲面の複雑さ」として説明する方法があります．衣服を縫うように上下に結って閉じた紐に張られる膜のうち，「表裏が付く場合」については 1958 年に村杉邦男氏（トロント大学名誉教授）が等式を発見し，証明していました．今回の発見はそれ以来の快挙となります．本成果がまとめられた論文は，2020 年 9 月 22 日に受理されました（International Journal of Mathematics）．

今後は物理や工学への展開，計算方法など実装への展開，また生物学や化学などへの新たな応用も期待されています．

３．発表内容

1958 年に村杉邦男先生が，すべての交代結び目について張られる膜のうち表裏がつくものについて形の決定をなさったことは数学の世界では有名です．ただその後，表裏がつかない場合は長い間未解決のままでした（図１）．

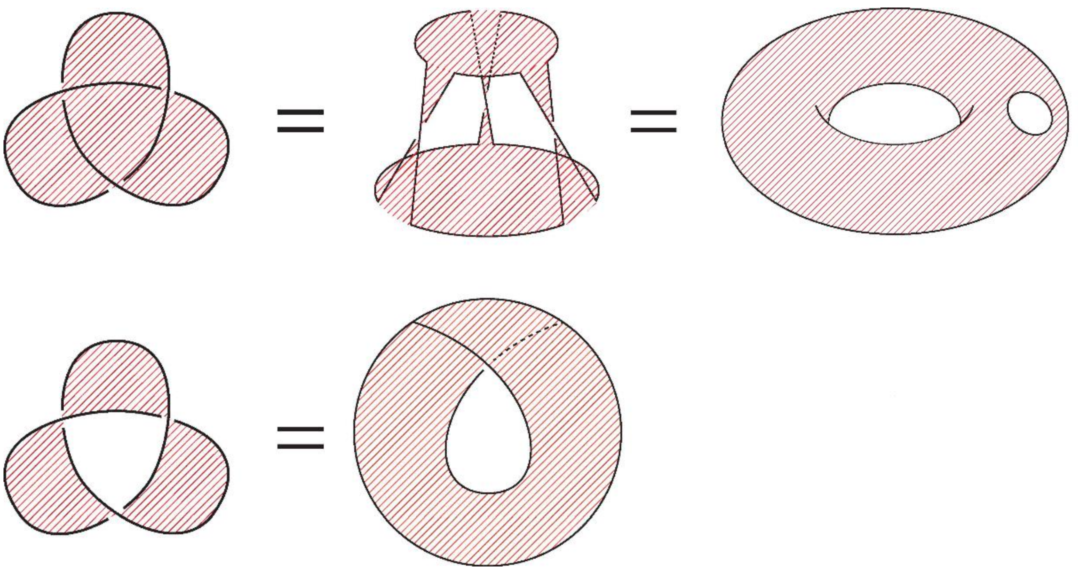


図１： 上段，表裏がつく場合，下段，表裏がつかない場合

今回，平面曲線における数（曲線解消数）と結び目膜の関係を見比べることにより，茨城工業高等専門学校の伊藤昇教員が新等式

「結び目膜に含まれるメビウスの帯の最小数 ＝ 曲線解消数」

を証明しました（文献１）．その発見は次のような経緯によるものです．

伊藤教員が 2016 年ごろに「一般に曲線の複雑度を測る量として適切な関数は何か？」という疑問を学習院中等科の瀧村祐介教諭にぶつけたところ，しばらく経って瀧村教諭は表（図２はその一部を表す）を作成し持ってこられました．

その表は図２のようなものから始まるものでした．

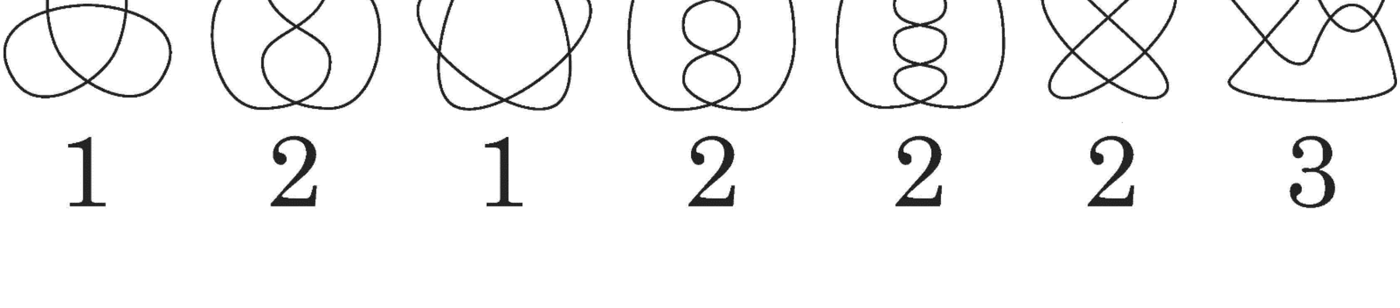


図２：平面曲線と対応する数（実際はもっと長いリスト）

伊藤教員はしばらく，この表を眺めて過ごしました．そしてあるとき，多くの結び目膜のうち，特に図１の下段のような膜に含まれるメビウスの帯の数とぴったり一致することに気づきました（図２と図３の比較をしたとのことです）．

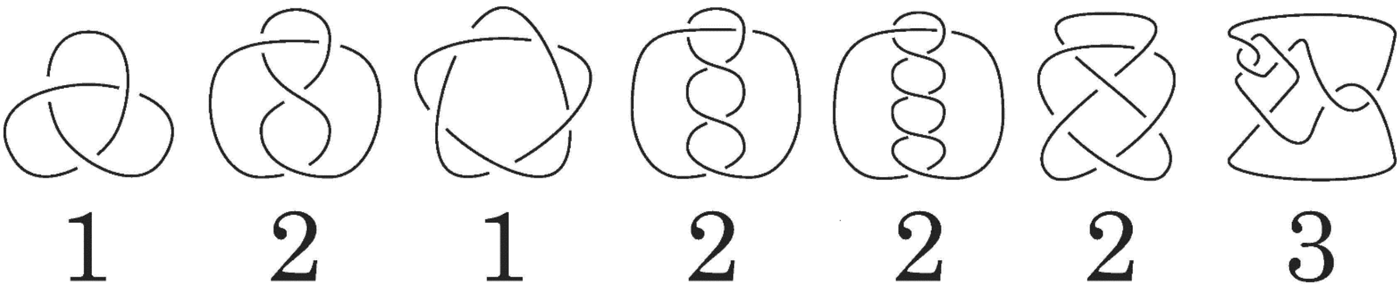


図３ ：　膜に含まれるメビウスの帯の最小数

それ以降，伊藤教員と瀧村教諭は次の問題を考えるに至りました．村杉先生のお考えになった交代結び目の範囲で等式

「結び目膜に含まれるメビウスの帯の最小数 ＝ 表（図２）で対応する数」

は成立するのか？

ただ，ここで最初のハードルがありました．図２における曲線と数の対応は，ある変形列を元に次の変形（図４）をノーカウントとすることにより，複雑度の本質を捉えやすくしています．

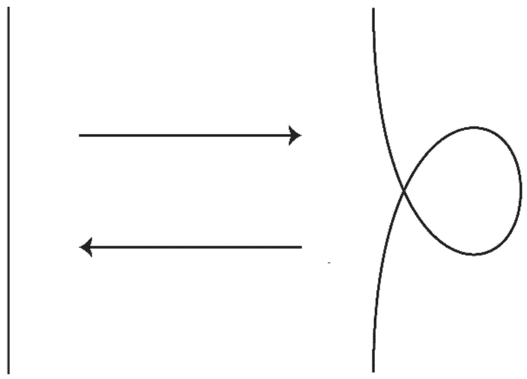


図４

しかし上記の式を証明しようとすると，曲線の交わり（交点と呼びます）が増えるときに曲面の構築がうまくいかず，その一方で，結び目がはいる空間設定を４次元に変えると，せっかく発見した表の一致が大きく崩れてしまう，このようなディレンマにぶつかったのです．そこで，伊藤教員と瀧村教諭は，この分野に精通されている先生方の見解を求めて，あちこち出かけました（日本は当該分野をお家芸としております）．そうした中で，お聞きしたそれまでの意見を総合して，伊藤教員はちょうどよい設定にたどりつきました．すなわち，交点を減らす方向のみをと

り，「曲線解消数」の概念を得たのです．しかし，これは同時に，証明への新たな挑戦の始まりでもありました．

「結び目膜に含まれるメビウスの帯の最小数 = 曲線解消数」

証明は難航，そこでボトムアップの作戦をとりました．曲線解消数が１の場合，曲線解消数が２の場合…といったアプローチです．この方法は結び目についてはみられたものの，メビウスの帯のカウントには使われたことがない方策でした．しかし，この方策により，曲線解消数が１，２，３の場合に，成功していきます．2018 年に，伊藤教員は不等式

「結び目膜に含まれるメビウスの帯の最小数 ≦ 曲線解消数」

を示し，瀧村教諭と協力して素な交代結び目について等式

「結び目膜に含まれるメビウスの帯の最小数 = 曲線解消数」

を特別な場合である「曲線解消数２」の場合に証明した，という論文（文献２）を発表します（素な，というのは数に対する素数と同様の概念です）．しかし，論文を発表するということは，同時にこの時点で国際的な競争が激しくなることも意味しました．

2018 年末，この等式の一般論について着想を得て，2019 年春に，上記等式を含む２論文（文献１，３）が投稿される運びとなりました．

一つは曲線解消数の数え方を少し変えて証明が簡単になる場合を考案し論文にしたもので，2020 年３月に出版されました（文献３）．もう一つは，望んでいた等式の証明とその幅広い応用の論文でした（文献１）．2020 年８月にイリノイ大学の講演会で伊藤教員はこの２つの論文について連続講演を行い“欧米流（very excellent，very nice など）”の賛辞を受けました．

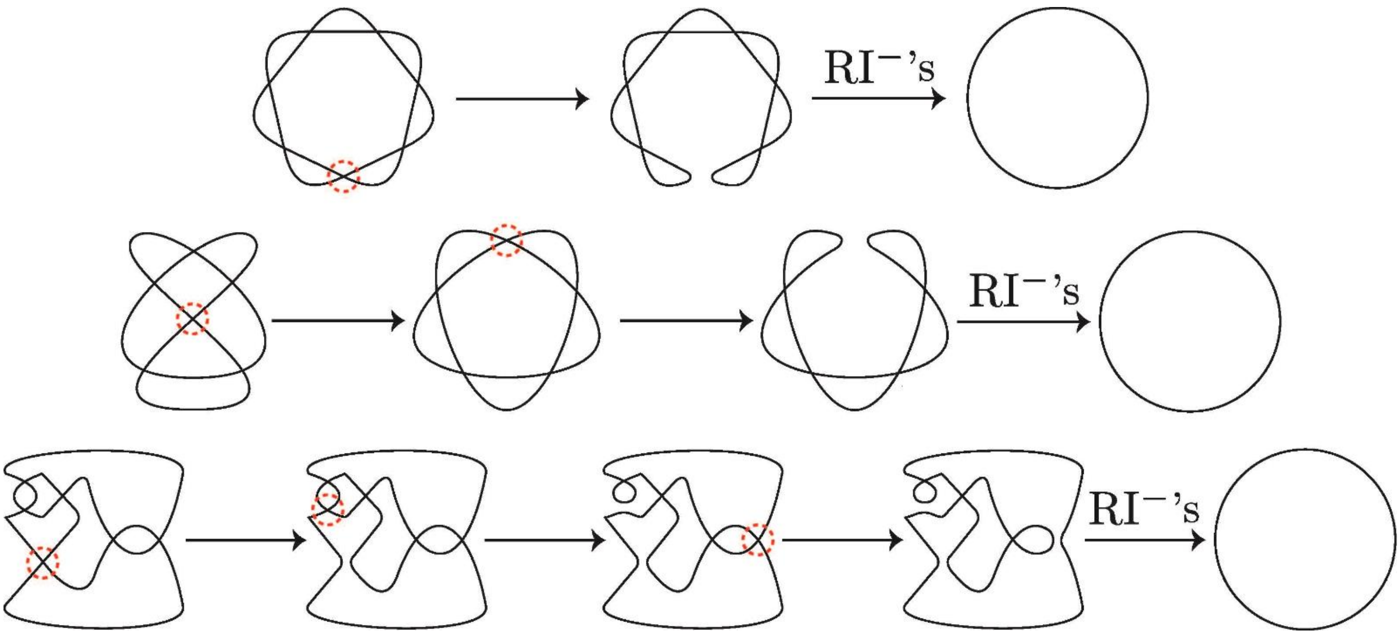
４．参考文献

文献１：N. Ito，Y. Takimura，Crosscap number and volume bounds，Internat. J. Math. Online.
(URL：https://www.worldscientific.com/doi/10.1142/S0129167X20501116)

文献２：N. Ito，Y. Takimura，Crosscap number and knot projections，Internat. J. Math. 29 (2018)，1850084，21pp.
(URL：https://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S0129167X18500842)

文献３：N. Ito，Y. Takimura，A lower bound of crosscap numbers of alternating knots，J. Knot Theory Ramifications 29 (2020)，no. 1，1950092，15pp.
(URL：https://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S0218216519500925)

５．参考図



この図のように，曲線解消数は丸で囲んだオペレーションの個数として数えられる．RI¯と書かれたのは図４のタイプの変形であり，これをノーカウントとしている．

＜瀧村教諭のコメント＞
今回の研究は，球面上の結び目の影（knot projection）の研究から発展し，空間内の結び目（knot）へ応用されたものである．この結果をもとに，素な交代結び目（prime alternating knot）に限らず，一般の結び目の crosscap number の研究が発展されることを期待している．

６．論文情報

雑誌名：「International Journal of Mathematics」
論文タイトル：Crosscap number and volume bounds
著者：N. Ito, Y. Takimura
URL: https://www.worldscientific.com/doi/10.1142/S0129167X20501116

７．本件に関する問い合わせ先

茨城工業高等専門学校 国際創造工学科 一般教養部　講師
伊藤　昇（いとう　のぼる）
Tel: 029-272-5201/029-271-2614（研究室直通）
E-mail: nito＠ibaraki-ct.ac.jp

学習院中等科　教諭（数学）
瀧村　祐介（たきむら　ゆうすけ）
Tel: 03-5992-1032
E-mail: bhs-off@gakushuin.ac.jp

（報道について）
茨城工業高等専門学校 総務課 研究協力･地域連携係
Tel： 029-271-2952
E-mail:kenkyo@sec.ibaraki-ct.ac.jp

学校法人学習院 総合企画部広報課（担当：湯元）
Tel： 03-5992-1008
E-mail:koho-off@gakushuin.ac.jp